Άσκηση 7η

10/11/16

$a = (1, 2)$

$b = (1, 2, \dots, \nu)$

Νδο $b^k a b^{-k} = (k+1, k+2)$

Λύση

Νδο $b^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu \\ \downarrow & & & \\ [k+1]_\nu & & & [\nu+k]_\nu \end{pmatrix}$ → Το ισχύει mod ν γιατί κάποια στιγμή θα ξεπεράσει το ν

$b^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu \\ \downarrow & & & \downarrow \\ [1-k]_\nu & & & [\nu-k]_\nu \end{pmatrix}$

Παραβλέπω τα mod γιατί ξέρω ότι όλοι οι αριθμοί είναι μικρότεροι του ν

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 2 & \dots & k+1 & k+2 & \dots & \nu \\
b^{-k} & [1-k]_\nu & [2-k]_\nu & & [1]_\nu & [2]_\nu & & [\nu-k]_\nu \\
a & [1-k]_\nu & \dots & & [2]_\nu & [1]_\nu & & [\nu-k]_\nu \\
b^k & 1 & 2 & \dots & k+2 & k+1 & & \nu
\end{array}$$

b) $(1, J) = \underbrace{(J, J-1)(J-1, J-2)\dots(i+2, i+1)}_{a}(i, i+1)$

$\underbrace{(i+1)(i+2)\dots(J-2, J-1)(J-1, J)}_{b}$

a)
$$\left.\begin{array}{l} i+1 \to J \\ i+2 \to J+1 \\ i+3 \to J+2 \\ \vdots \\ J-1 \to J-2 \\ J \to J-1 \end{array}\right\} = (J, J+1, \dots, i+1)$$

$b = (i+1, i+2, \dots, J) \quad | \; a\,(i, i+1)\,b$

$$\begin{array}{lllll}
 & i & i+1 & j-1 & j \\
b & i & i+2 & j & i+1 \\
(i, i+1) & i+1 & i+2 & j & i \\
a & j & i+1 & j-1 & i
\end{array}$$

Άσκηση 6

Ως β' τρόπος:

$(1,2,3) = (1,2)\cdot(1,3)$: άρτιο πλήθος

$(1,2)\cdot(4,5,6) = (1,2)\cdot(4,5)\cdot(4,6)$ περιττό

άρα

Δε γίνεται να υπάρξει αντιμετάθεση που να είναι άρτια και περιττή ταυτόχρονα.

Άσκηση 4

$H = \{(1), \underbrace{(1,2), (3,4)}_{f}, \underbrace{(1,3), (2,4)}_{g}, \underbrace{(1,4), (2,3)}_{h}\}$

$\emptyset \neq H \subseteq S_4$

$o(f) = o(g) = o(h) = 2$

$$\left.\begin{array}{lll} fg = h & fh = g & gh = f \\ gf = h & hf = g & hg = f \end{array}\right\}$$ αβελιανή, αντιμεταθετικά ουδέτερα

$H = \langle f, g \rangle$

Είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \simeq H$

γιατί έχουν την ίδια δομή.

Θεώρημα

Αν p πρώτος, τότε $\mathbb{Z}_p^*$ είναι κυκλική.

Απόδειξη

$|\mathbb{Z}_p| = p-1 \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow \alpha^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

$\Rightarrow o(\alpha) / p-1$

$H = \{ o(\alpha) / \alpha \in \mathbb{Z}_p \} \Rightarrow \max H = n \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{Z}_p^*$

$o(\alpha) = n$

$\forall b \in \mathbb{Z}_p^* \Rightarrow o(b)/o(\alpha) = n$ $\quad \Rightarrow \alpha^{p-1} \equiv 1 \bmod p.$

Euler

$o(b) = m$ με $m \nmid n$

$ab \equiv ba \bmod p.$

$\Rightarrow \exists\ \kappa, l$ με $o(\alpha^{\kappa} b^{l}) = [m, n]$ = Ε.Κ.Π.

$m \nmid n \Rightarrow [m, n] > n$

$\alpha^{\kappa} b^{l} \in \mathbb{Z}_p^* \overset{\text{άτοπο}}{\Rightarrow} o(\alpha^{\kappa} b^{l}) \leq n$

$\forall b \in \mathbb{Z}_p^* \Rightarrow o(b)/n \Rightarrow x^n \equiv 1 \bmod p \Rightarrow$

έχει το πολύ n λύσεις

$|\mathbb{Z}_p^*| = p-1$ διαφορετικά στοιχεία

Όλα ικανοποιούν τη σχέση $p-1 \leq n$

και $\boxed{n / p-1 \Rightarrow n = p-1}$

Κανονικές Υποομάδες

$Z(G) = \{ g / gg' = g'g \ \forall g \in G \}$: κέντρο

$gg' = g'g \Leftrightarrow (g')^{-1} g g' = g$

Κάθε στοιχείο του κέντρου αναλλοιώτο μένει (?)

Ουσιαστικά το κέντρο μας λέει πόσο "κοινή" είναι μια ομάδα, αυτό το να είναι αβελιανή. Αν είναι αβελιανή, τότε όλη η ομάδα είναι το κέντρο.

O: αβελιανή $\Leftrightarrow Z(O)=O$

$Z(O) \leq O$

Πρόταση

$O = O_1 \times \ldots \times O_k$: ευθύ γινόμενο

$Z(O) = Z(O_1) \times \ldots \times Z(O_k)$

Ορισμός

Ο κεντροποιητής ενός στοιχείου $a \in O$ είναι το σύνολο $\{g \mid gag^{-1} = a\} = C(a) = Z(a)$

Ιδιότητες

- $Z(a) \leq O \quad \forall a \in O$
- $Z(1) = O$
- $Z(O) \leq Z(a) \quad \forall a \in O$

$ga = ag$

$\Rightarrow aga^{-1} = a$

Τα συζυγή του a: $\bar{a} = \{gag^{-1} / \forall g \in O\}$

$gag^{-1} = g'a(g')^{-1}$

Αν $gag^{-1} = a \Rightarrow ga = ag$

$gaZ(a) = agZ(a)$

$gZ(a) = gZ(a) \quad (1)$

$$gag^{-1} = g'a(g')^{-1} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$(g')^{-1} g a = a (g')^{-1} g \Rightarrow$$

$$(g')^{-1} g a = a (g'^{-1} g)^{-1} \Rightarrow$$

$$(g')^{-1} g \in Z(a) \Leftrightarrow gZ(a) = g'Z(a)$$

Παράδειγμα

$$S_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$$

$$Z(f) = \langle f \rangle$$

Γιατί θέλω στοιχεία τάξης δύο, άρα $1, f, f^2$ οπότε έχω κυκλική υποομάδα

γιατί $\bar{f} = \{f, f^2, 1\}$

Το 1 είναι λάθος γιατί

$$\bar{f} = \{hfh^{-1} / \forall h \in S_3\}$$

- $1f1^{-1}$
- fff^{-1}
- $f^2 f f^2$
- gfg^{-1} $\quad g^{-1} = g$
- $fgf(fg)^{-1} = fgfg^{-1}f^{-1} = f^2 f^2 f^2$
- $fgf^{-1} = g f^2 f^{-1} = gf = f^2 g$

Άρα αντίστοιχα δουλεύουμε για το g

$$\bar{g} = \{g, f^2g, fg\} =$$

γιατί $\cdot f^2 g f^{-2} = g f f^{-2} = g f^{-1} = f^2 g$

$\cdot fg\, g (fg)^{-1} = fgf^{-1} = gf^2 f^{-1} = gf = f^2 g$

$\cdot fgg (fg)^{-1} = fgf^{-1} = gf^2 f^{-1} = gf = f^2 g$

$\cdot f^2 gg (f^2 g)^{-1} = f^2 g f^{-2} = g f f^{-2} = g f^{-1} = g f^2 = fg$

Άρα

$|\bar{f}| = 2 = [S_3 : \langle f \rangle]$

$\cdot Z(f) = \langle f \rangle$ γιατί $f \in Z(f) \Rightarrow \langle f \rangle \leq Z(f)$

$Z(f) = \{h / hf = fh\}$

Αν $\langle f \rangle \not\leq Z(f) \Rightarrow Z(f) = S_3 \rightarrow$ Όχι αβελιανή!

$\cdot Z(g) = \{1, g\} = \langle g \rangle$

Αν $f^i g \in Z(g) \Rightarrow f^i g \in Z(g) \Rightarrow Z(g) = S_3$!

<u>Πρόταση</u>

Τα a και $b \in G$ καλούνται συζυγή αν $\exists\, j$ με $a = jbj^{-1}$. Η προηγούμενη έννοια ορίζει σχέση ισοδυναμίας στην G. Οι κλάσεις ισοδυναμίας $\bar{a} = \{gag^{-1} / \forall g \in G\}$ ορίζουν διαμέριση της G.

<u>Πρόταση</u>

Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Αν $a \in G$, τότε $|\bar{a}| = [G : Z(a)]$

<u>Απόδειξη</u>

$Z(a) = \{g \,/\, ga = ag\} \leq G$ ← υποομάδα της G

$\bar{a} = \{gag^{-1} \,/\, \forall g \in G\}$

$\Phi : \bar{a} \to$ {αριστερά σύμπλοκα}

$|\{gZ(a) \,/\, g \in G\}| = [G : Z(a)]$

$\Phi(gag^{-1}) = gZ(a)$

Θέλουμε νδο είναι καλά ορισμένη, 1-1, και επί

$gag^{-1} = g'a(g')^{-1} \Leftrightarrow$

$gZ(a) = g'Z(a)$

Το δείξαμε άρα Φ καλά ορισμένη 1-1

Επί: $gZ(a) = \Phi(gag^{-1})$

<u>Θεώρημα</u> (Εξίσωση κλάσεων συζυγίας)

Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $\{a_1, \ldots, a_k\}$ αντιπρόσωπα των κλάσεων συζυγίας οι οποίες περιέχουν τουλάχιστον δυο στοιχεία:

$$|G| = |Z(G)| + [G : Z(a_1)] + \ldots + [G : Z(a_k)]$$

<u>Απόδειξη</u>

$a \in G$ και $\bar{a} = \{a\} = \{gag^{-1} \,/\, g \in G\}$

$a = gag^{-1} \ \forall g \in G \Leftrightarrow$

$\Longleftrightarrow ga = ag \ \forall g \in G \Longleftrightarrow a \in Z(G)$

Γνωρίζουμε ότι $G = \sqcup$ κλάσεων συζυγίας $=$

$=\sqcup$ κλάσεων ισοδυναμίας με μόνο ένα στοιχείο $\sqcup$ κλάσεων συζυγίας με ≥ 2

$= Z(G) \qquad \bigsqcup_{1}^{k} \overline{a_i}$

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i}^{k} |\overline{a_i}| \overset{\text{Πρότ.}}{=} |Z(G)| + \sum_{1}^{k} [G : Z(a_i)]$$

Πρόταση

Έστω $(a_1, \dots, a_k) \in S_n$ και σ τυχαία μετάθεση.
Τότε $\sigma(a_1, \dots, a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))$

Πόρισμα

Αν $(a_1, \dots, a_k)$ και $(b_1, \dots b_k)$ δυο k-κύκλοι στην S_n τότε αυτοί είναι συζυγείς.

Ορισμός

Έστω $Y \leq G$ υποομάδα.
Η Y θα καλείται κανονική αν $\underbrace{gYg^{-1}}_{(*)} \subseteq Y \in G$

$$(*) \ gYg^{-1} = \{ghg^{-1} / h \in Y\}$$

Ιδιότητες

i) $Y \trianglelefteq G \Leftrightarrow gYg^{-1} = Y \ \forall g \in G \Leftrightarrow$

ii) $gY = Yg \quad g \in G$

iii) $gYg^{-1} = Y \Leftrightarrow ghg^{-1} = h'$, για κάποιο h'

Παράδειγμα

$S_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$

$\langle g \rangle$ Να βρεθούν τα συζυγή.

Λύση

Είναι $\langle g \rangle \trianglelefteq S_3$ → Όχι!

$$fgf^2 = gf^2f^2 = gf = f^2g \neq g$$

$$f\langle g\rangle f^2 = \{f1f^2, fgf^2\} =$$

$$\{1, ffg\} = \{1, f^2g\} = \langle f^2g \rangle$$

Θεώρημα

Αν $Y \leq G$ και $[G:Y] = 2 \iff Y \trianglelefteq G$

Απόδειξη

Θέλουμε $gYg^{-1} = Y \iff gY = Yg$

$[G:Y] = 2 \iff$ δυο συμπλέγματα : Y, bY

$b \notin Y \iff G = Y \sqcup bY = Y \sqcup Yb$

Θέλουμε $gY = Yg \quad \forall g \in G$

Αν $g \in Y \Rightarrow gY = Y = Yg$

Αν $g \notin Y \Rightarrow gY \neq Y \Rightarrow gY = Yg$

Προσοχή

Δεν ισχύει το αντίστροφο.

Πόρισμα

Οι εναλλάσσουσες A_n και κανονικές στην S_n.

$$[S_n : A_n] = 2.$$

Ορισμός

Μια ομάδα καλείται απλή, αν οι μόνες κανονικές της είναι ο εαυτός της και η τετριμμένη.

Θεώρημα

Οι A_n είναι απλές για $n \geq 5$.

Δεν είναι όμως μόνο αυτές.

Πρόταση

Ισχύει ότι $gHg^{-1} \leq G \quad \forall g \in G$

και

$$|gHg^{-1}| = |H|$$

Απόδειξη

Υποομάδα

$$(ghg^{-1})(gh'g^{-1}) = ghh'g^{-1} \in gHg^{-1}$$

Ορίζουμε την $\Phi: H \to gHg^{-1}$, $h \to ghg^{-1}$ $\Big\}$ $1-1$ επί $\Rightarrow |H| = |gHg^{-1}|$

Πόρισμα

Αν στην ομάδα G υπάρχει μόνο μια υποομάδα με τάξη k, τότε αυτή είναι κανονική

Απόδειξη

Έστω $|H| = k \Rightarrow |gHg^{-1}| = k$

$$gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G \Leftrightarrow H \trianglelefteq G$$

Homework: Συλλ.

2 7
3 8
4